1 Дифференциалы высших порядков от функций с двумя переменными.

Дифференциалы высших порядков определяются как:

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n \cdot (f(x,y))$$

Иначе, разложив по формуле бинома Ньютона, получим:

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \cdot \partial y^k} \cdot \mathrm{d}x^{n-k} \cdot \mathrm{d}y^k$$

Пример 1.

$f(x,y) = x \cdot \ln y$ Найти: $\mathrm{d}^3 f(x,y)$

Формула для вычисления дифференциала третьего порядка от функции двух переменных:

$$\mathrm{d}^3 f(x,y) = C_3^0 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot \mathrm{d}x^3 + C_3^1 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cdot \mathrm{d}x^2 \cdot \mathrm{d}y +$$
$$+ C_3^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y^2 + C_3^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \cdot \mathrm{d}y^3$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{2x}{y^3};$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

Подставим значения в формулу:

$$\mathrm{d}^3 f(x,y) = 1 \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x^3 + 3 \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x^2 \cdot \mathrm{d}y +$$
$$+3 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y^2 + 1 \cdot \frac{2x}{y^3} \cdot \mathrm{d}y^3$$

Вычислим оставшееся:

$$d^3 f(x,y) = 0 + 0 - \frac{3}{y^2} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{2x}{y^3} \cdot dy^3$$
$$d^3 f(x,y) = -\frac{3}{y^2} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{2x}{y^3} \cdot dy^3$$

Ответ: $-\frac{3}{y^2} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{2x}{y^3} \cdot dy^3$

Пример 2. (Лунгу № 11.5.7)

$z = f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ Найти: $d^2 z$

Формула для вычисления дифференциала второго порядка от функции двух переменных:

$$d^2 z = C_2^0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + C_2^1 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + C_2^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cdot \sin y;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cdot \sin y;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y;$$

Подставим значения в формулу:

$$d^2 z = 1 \cdot (-\sin x \sin y) \cdot dx^2 + 2 \cdot \cos x \cos y \cdot dx \cdot dy + 1 \cdot (-\sin x \sin y) \cdot dy^2$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y \cdot dx^2 + 2 \cos x \cos y \cdot dx \cdot dy - \sin x \sin y \cdot dy^2$$

Ответ: $-\sin x \sin y \cdot dx^2 + 2 \cos x \cos y \cdot dx \cdot dy - \sin x \sin y \cdot dy^2$